5/5/2017

Μέθοδος Ροπών

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$.

Πληθυσμιακές Ροπές (απλές)

$$\mu_k := E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k \cdot p(x,\theta), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x,\theta)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Δειγματικές Ροπές:

$$m_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Σχέση Μεταξύ πληθυσμιακών και δειγματικών Ροπών

(I) $E(m_k) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Δηλαδή οι δειγματικές ροπές είναι αμερόληπτοι των πληθυσμιακών ροπών

Απόδειξη: $E(m_k) \overset{\text{ορ}}{=} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^k)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_k = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu_k = \mu_k$

Άρα, $E(m_k) = \mu_k$

(II) Αποδεικνύεται ότι: $m_k \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \mu_k$, $k=1,2,3,\ldots$

Από (I) & (II) $\Rightarrow m_k \simeq \mu_k$

Όμως $\mu_k = \mu_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$

Άρα, $\mu_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) \simeq m_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, r$

Εφαρμογή (Μεθόδου Ροπών)

- Κατασκευάζω το σύστημα r-εξισώσεων με r αγνώστους

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1(\theta_1, \ldots, \theta_r) = m_1 \\ \vdots \\ \mu_r(\theta_1, \ldots, \theta_r) = m_r \end{array}\right\} (\Sigma)$$

- Λύνω το σύστημα ως προς $\theta_1, \ldots, \theta_r$
- Οι λύσεις $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_r$ είναι οι εκτιμήτες των $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ με τη μέθοδο των ροπών

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2: άγνωστα. Να βρεθούν οι εκτιμητές με τη μέθοδο ροπών του μ και σ^2

Λύση:
$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= M_1 \\ \mu_2 &= M_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Όμως } \mu_1 = E(X) = \mu \\ &\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

και
$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \bar{X} \\ M_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\mu = \bar{X} \\ &\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ &\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 \end{aligned}$$

Άρα $\tilde{\mu} = \bar{X}$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Άρα Ε.Μ.Ρ $\equiv$ Ε.Μ.Π

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $U(0,\theta)$

Να βρεθεί ο Ε.Μ.Ρ

Λύση: $\mu_1 = m_1 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ από $G(a,\beta)$

Να βρεθούν Ε.Μ.Ρ των a, β

$$\bar{X} = a\beta \quad \Rightarrow \bar{X} = a \cdot \beta \Rightarrow \tilde{\beta} = \frac{\bar{X}}{\tilde{a}}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = a\beta^2 + a^2\beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = a\beta \cdot \beta + (a\beta)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Rightarrow \dots \tilde{a} =$$

Εκτίμηση σε διάστημα - Διαστήματα εμπιστοσύνης

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Μέχρι τώρα η εκτίμηση σε σημείο $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $T \simeq \theta$ ή $T \simeq g(\theta)$

π.χ $\bar{X}$ $\left(\begin{matrix}\text{ΑΟΕΔ} \\ \text{Ε.Μ.Π} \\ \text{Ροπών}\end{matrix}\right)$ για τη μ ενός $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό

Άρα, $\bar{X} \simeq \mu$

Ορισμός: Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και έστω στατιστικές συναρτήσεις

$L = L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με $L < U$

Το τυχαίο διάστημα $(L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n))$

λέγεται διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε) για την

παράμετρο θ με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-a)\%$,

$0<a<1$. Αν $P(L(X_1, \ldots, X_n) < \theta < U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1-a$

(α)

Παρατηρήσεις: Ο βαθμός εμπιστοσύνης $100(1-a)\%$

πρέπει να είναι μεγάλος. Πράγματι, στην πράξη

θεωρούμε β.ε $= 90\%, 95\%, 99\%$ άρα $a=0{,}1$, ή $a=0{,}05$

ή $a=0{,}01$

(β) Διαισθητική ερμηνεία του δ.ε

Αν επιλέξω 100 δείγματα περιμένω $100(1-a)\%$ φορές

η άγνωστη θ να περιέχεται στο αντίστοιχο

δ.ε

Scanned by CamScanner

(γ) Μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης για την θ με τον ίδιο β.ε το $100(1-a)\%$ προτιμότερο είναι εκείνο με το μικρότερο μήκος).

Ερώτημα: Πως μπορώ να κατασκευάσω διάστημα εμπιστοσύνης

Απάντηση: Μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας

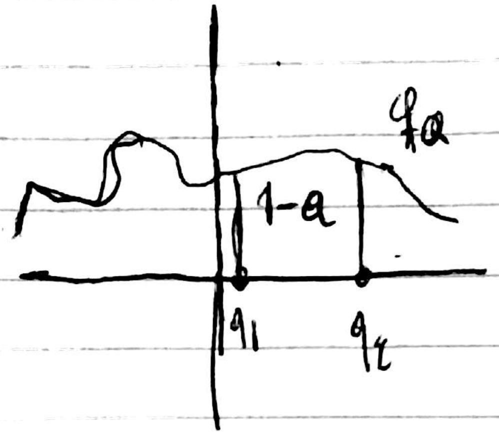
Ορισμός (Αντιστρεπτή Ποσότητα)

Με τον όρο αντιστρεπτή ποσότητα εννοούμε μια συνάρτηση του τδ και της παραμέτρου θ ~~με~~ που η κατανομή της είναι ανεξάρτητη του θ.

Η μέθοδος υλοποιείται ως εξής:

Βήμα 1: Έστω $Q = Q(X_1, X_2, \dots, X_n)$ αντιστρεπτή,

Βήμα 2: Αφού η Q είναι αντιστρεπτή άρα υπάρχουν q_1, q_2 με $q_1 < q_2$ και q_1, q_2 ανεξάρτητα της θ (αφού η κατανομή της Q δεν εξαρτάται από το θ) ώστε $P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$ (*)



Βήμα 3: Προσπαθώ να λύσω την ανισότητα στην (*) ως προς θ με σκοπό να πάρω

$P(L<\theta<U)=1-a$

Παράδειγμα: Διαστήματα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ κανονικού πληθυσμού $N(\mu,\sigma^2)$

(1) σ^2 γνωστή

Βήμα 1: $Q=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

Αντιστρεπτή, αφού Q συνάρτηση του τ.δ., συνάρτηση του μ με κατανομή ανεξάρτητη του μ.

Βήμα 2: Αφού $Q\sim N(0,1)$ αντιστρεπτή άρα

$\exists\, q_1,q_2\ (q_1<q_2):\ P(q_1<Q<q_2)=1-a$

$\Rightarrow P\left(q_1<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<q_2\right)=1-a$

$$\Rightarrow P\left(q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu < q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow P\left(\bar{x} - \frac{q_2 \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - \frac{q_1 \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

$$L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - 1\right) = 0 \quad (1)$$

Επίσης $P(q_1 < Q < q_2) = 1-a \Leftrightarrow \int_{q_1}^{q_2} f_Q(q)\, dq = 1-a$

$$\Leftrightarrow F(q_2) - F(q_1) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_1}\left(F(q_2) - F(q_1)\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}(1-a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1}(F(q_2)) - f_{q_1}(q_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \cdot f_{q_2}(q_2) = f_{q_1}(q_1)$$

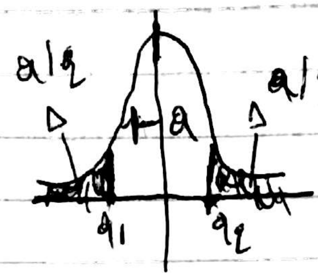
$$\Leftrightarrow \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{f_{q_1}(q_1)}{f_{q_2}(q_2)}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{f_{q_1}(q_1)}{f_{q_2}(q_2)} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{f_{q_1}(q_1) - f_{q_2}(q_2)}{f_{q_2}(q_2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow f_{q_1}(q_1) = f_{q_2}(q_2) \Leftrightarrow e^{-q_1^2/2} = e^{-q_2^2/2} \Leftrightarrow q_1 = q_2 \text{ ή } q_1 = -q_2,$$

Όμως $q_1 < q_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$. Άρα $q_1 = q_2$ (απορρ)

Επομένως $q_1 = -q_2$



Άρα το q_2 ικανοποιεί $P(Z > q_2) = \frac{a}{2}$

Από ορισμό εκατοστιαίων σημείων

το $q_2 = z_{a/2} \Rightarrow q_1 = -z_{a/2}$

(2) Αν σ^2 άγνωστη

$$\cancel{Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}}$$

$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$P(q_1 < Q < q_2) \Rightarrow P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < q_2\right) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \frac{q_2 S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{q_1 S}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

$$C = \frac{S}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1) \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial q_1} = \frac{S}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - 1\right) \quad (1)$$

- $F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1-a$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \cdot f_Q(q_2) = f_Q(q_1) \Rightarrow \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\partial C}{\partial q_1} = \frac{S}{\sqrt{n}}\left(\frac{f_Q(q_1) - f_Q(q_2)}{f_Q(q_2)}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow q_1 = q_2$ ή $q_1 = -q_2$ (Απορρ. η $q_1 = q_2$

άρα $q_1 = -q_2$)

Επειδή ~~τα~~ $f_{t_{n-1}}$ συμμετρική και $q_1 = -q_2$

$P(t_{n-1} \geq q_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow q_2 = t_{n-1,\frac{a}{2}}$ $q_1 = -t_{n-1,a/2}$

Τελικά του $100(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους για

τη μ όταν σ^2 άγνωστο είναι $\left(\bar{X} - t_{n-1,a/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,\frac{a}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Scanned by CamScanner